MATHEMATIK

Merkhilfe

Eine Sammlung der wichtigsten Formeln und Regeln

Die Merkhilfe bietet dir einen guten Überblick über die wichtigsten und am häufigsten verwendeten Formeln und Regeln. Im Vergleich zu einer Formelsammlung ist dieses Dokument übersichtlicher, konzentriert sich auf das Wesentliche und beinhaltet keine Definitionen, Herleitungen oder Voraussetzungen. Die Merkhilfe eignet sich perfekt zum Nachschlagen und schnellen Wiederholen vor Prüfungen.
So sparst du Zeit beim Festigen der wichtigsten mathematischen Konzepte.

FORMELN UND REGELN AUS DER MITTELSTUFE

Folgende Inhalte sind prüfungsrelevante Formeln und Regeln die in der Mittelstufe behandelt werden.

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$x^2 + p \cdot x + q = 0. \quad => \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0. \quad => \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Logarithmen

$log_a(bc) = log_a b + log_a c$

$log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c$

$log_a b^r = r \cdot log_a b$

Potenzen

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

$(a^r)^s = a^{rs}$

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$a^r \cdot b^r = (ab)^r$

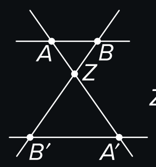
Strahlensätze

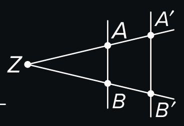
Wenn A B II A´B´, dann gilt:

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}},$

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$





Beliebiges Dreieck

Der Sinussatz:

$a : b : c = sin\alpha : sin\beta : sin\gamma$

Der Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\gamma$

Rechtwinkliges Dreieck

Der Satz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz:

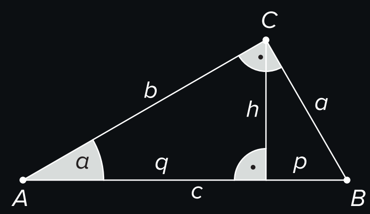
$h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = cp; \quad b^2 = cq$

$sin\alpha = \frac{a}{c}$

$cos\alpha = \frac{b}{c}$

$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{a}{b}$



Sinus / Kosinus

$sin(-\varphi) = -sin\varphi$

$cos(-\varphi) = cos\varphi$

$(sin\varphi)^2 + (cos\varphi)^2 = 1$

$sin(90^\circ - \varphi) = cos\varphi$

$cos(90^\circ - \varphi) = sin\varphi$

Raumgeometrie

Prisma: $V = Gh$

Pyramide: $V = \frac{1}{3}Gh$

gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}r^2\pi h; \ M = r\pi m$

gerader Kreiszylinder: $V = r^2\pi h; \ M = 2r\pi h$

Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi; \ O = 4r^2\pi$

Figurengeometrie

Rechteck: $A = a^*b$

Raute: $A = a^*ha$

Dreieck: $A = 0{,}5^*g^*h$

Parallelogramm: $A = a^*ha$

Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

Kreis: $U = 2r\pi; \quad A = r^2\pi$

ANALYTISCHE GEOMETRIE

Analytische Geometrie beschreibt geometrische Objekte algebraisch mit Koordinaten und Gleichungen.

Skalarprodukt im R^3

- Definition: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- Zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \ (0 \leq \varphi \leq \pi)$

Vektorprodukt im R^3

- Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
- Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- Betrag: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \ (0 \leq \varphi \leq \pi)$
- Flächeninhalt eines Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- Volumen einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{AB} \circ (\vec{AC} \times \vec{AD})|$

Schwerpunkt eines Dreiecks *ABC*

$\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$

Mittelpunkt einer Strecke [AB]

$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

Kugelgleichung

$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Ebene im R^3

- Parameterform:
  $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
- Normalenform in Vektordarstellung:
  $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$
- Normalenform in Koordinatendarstellung:
  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$

ANALYSIS

Das Änderungsverhalten von Funktionen, Flächen- und Volumenberechnung

Grenzwerte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (x^r \cdot \ln x) = 0$$

jeweils $r > 0$

Ableitung

- Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(Im Fall, dass der Grenzwert existiert und endlich ist)

- Schreibweisen: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

Ableitungsregeln

Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Anwendungen der Differentialrechnung

- Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$
- Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$
- Monotonie:

  $f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I.

  $f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I.
- Extrempunkte

  Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Extrempunkt.
- Krümmung

  $f''(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt.

  $f''(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkte

  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Newton'sche Iterationsforme: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Unbestimmte Integrale

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \; (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

(F ist eine Stammfunktion von f)

Grundfunktionen ableiten

$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\sin x)' = \cos x$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

(F ist eine Stammfunktion von f)

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow I'(x) = f(x)$$

STOCHASTIK

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Urnenmodell

- **Ziehen ohne Zurücklegen**

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{"genau k schwarze Kugeln"}) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- **Ziehen mit Zurücklegen**

Aus einer Urne, in der der Anteil schwarzer Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$$P(\text{"genau } k \text{ schwarze Kugeln"}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Signifikanztest

- Fehler 1. Art: H_0 wird irrtümlich abgelehnt
- Fehler 2. Art: H_0 wird irrtümlich nicht abgelehnt

Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Unabhängigkeit zweier Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- Erwartungswert:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

- Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n; p)$, so gilt:

- $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Notizen